EN SOUVENIR D'UN AMI DISPARU : UN DES DERNIERS DEBATS DE BERNARD PRUM

Jean-Pierre RAOULT[1]

Ce libre propos a tout d'abord le caractère d'un hommage à mon ami Bernard Prum, disparu brutalement le 21 octobre 2015 à l'âge de 69 ans. Je n'ai pas l'intention de retracer ici la richesse de ses apports à l'enseignement et à la recherche en probabilités et en statistique. D'autres l'ont fait, qui avaient une vision plus globable que moi du très large spectre des champs qu'il a abordés, au travers d'une carrière qui l'a mené d'équipes universitaires « traditionnelles » pour notre discipline, en ceci qu'elles étaient proches d'équipes mathématiques (quoiqu'il y ait très tôt développé des travaux et des enseignements orientés vers les applications, en particulier en biologie) jusqu'à une immersion résolue dans la recherche médicale et biologique au sein du Génopôle d'Evry. Pour la compréhension de cet itinéraire scientifique hors norme et remarquablement efficace, je renvoie en particulier à l'article de Xavier Guyon, titré *Bernard Prum, un mathématicien épris de biologie* dans *La gazette des mathématiciens* (numéro 147, pages 71 à 73).

J'ai plutôt choisi de parler ici d'un exemple de l'activité de Bernard Prum qui ne peut être connu de nos lecteurs, car il se situe dans les derniers mois de son existence, à la fin de 2014 et au début de 2015, et qu'il fut totalement non public, puisqu'il s'agit de notre participation à tous deux à des échanges avec Daniel Perrin, sur sollicitation de celui-ci, alors qu'il préparait son libre propos qui a été publié dans *Statistique et Enseignement* au numéro 1 du volume 6, sous le titre *Remarques sur l'enseignement des probabilités et de la statistique au lycée*. Ce choix est guidé aussi par le fait que Bernard Prum et moi-même avions envisagé d'écrire en commun une réponse à cet article de Daniel Perrin ; le décès prématuré de Bernard Prum a hélas annihilé ce projet et le présent texte n'en est qu'un succédané, nécessairement bien moins riche que ne l'aurait été le fruit d'une rédaction commune. Enfin, je dois dire que tant ces contacts de 2014 et 2015 que la préparation du présent « libre propos » ont été pour moi la source d'une évolution dans ma vision des possibilités d'enseignement, esentiellement en classe terminale ; que Daniel et Bernard en soient ici remerciés.

Cette manifestation privée de la pensée de Bernard Prum fut, je crois, emblématique de la manière dont, comme il l'a fait dans son ouvrage *La démarche statistique* (Cepadues, 2010), il savait convoquer son expérience d'usage de la statistique, marquée par la lutte contre de nombreuses idées fausses tant chez les mathématiciens que chez des utilisateurs, pour nourrir une réflexion sur sa nature même et, partant, sur les possibilités et contraintes de son enseignement.

Notre « dispute », au sens ancien et noble de ce terme, a porté essentiellement sur deux points : la faisabilité de l'enseignement des intervalles de confiance relativement à des proportions inconnues, tel qu'il figure au programme de mathématiques du cycle terminal en France en filières S, ES, L (en spécialité mathématiques) et l'opportunité de l'introduction des lois gaussiennes, qui sont présentes dans la plupart des programmes de mathématiques des

[1] Professeur des universités honoraire, Université Paris-Descartes, jeanpierre.raoult@gmail.com

lycées, généraux, technologiques ou professionnels (apparaissant même dans ces derniers dès la classe de première). Ces deux thèmes sont intimement liés, les procédures enseignées pour les intervalles de confiance étant en fait fondées sur l'approximation gaussienne des lois binomiales. Mais le débat y est de natures épistémologique et pédagogique fort différentes, et c'est ce à quoi je vais m'attacher dans le suite de ce billet.

Les intervalles de confiance n'ont jamais été présentés comme centraux dans la formation scientifique des jeunes atteignant le baccalauréat ; ils sont plutôt là, et depuis quelques années seulement, à titre d'exemple d'une problématique standard de statistique inférentielle ; ils y ont succédé à un choix antérieur qui était libellé *Etude d'un exemple traitant de l'adéquation de données expérimentales à une loi équirépartie*, et qui donc impliquait la mise en place d'une version simple du test du chi2, tout en précisant dans la colonne des commentaires : *Le vocabulaire des tests ... est hors programme* (ce qui lui conférait donc moins de poids théorique que n'en eut ensuite l'introduction des intervalles de confiance). Pour sa part Bernard Prum, dans nos échanges, avait marqué une attention particulière au problème de test « unilatère » sur une proportion, en mettant en évidence comment les moyens de calcul actuellement à la disposition des élèves et étudiants permettaient à la fois de le traiter directement sur les lois binomiales et, surtout, de s'appuyer sur le calcul du degré de signification (dds, ou dans la littérature anglais « p- value ») associé au résultat observé, ce qui est bien plus riche et moins arbitraire que le carcan introduit par le seuil de signification (Bernard Prum nous avait parlé du besoin de *Tuer une fois pour toutes le mythe des 5%)*. Même si Bernard Prum ne s'était pas posé en contempteur des programmes actuels, pouvant en proposer des améliorations, il était assez clair, je crois, que, pour lui, prendre pour archétype de la statistique inférentielle (s'il faut aborder dans les lycées ce thème dont j'ai, pour ma part, la conviction qu'il est formateur) le test unilatère portant sur une proportion inconnue aurait de multiples avantages, plutôt que l'intervalle de confiance, ou même que le test bilatère. Il relevait que c'est techniquement plus facile car évitant des problèmes de symétrie dont la solution introduit un certain arbitraire. Il mettait en évidence que c'est conceptuellement plus simple, et ceci n'est pas négligeable comme le manifestent de multiples témoignages du trouble ressenti par les enseignants devant les intervalles de confiance, tels que, par exemple, les commentaires suscités par mon propre billet dans *Images des Mathématiques* titré : *Intervalle de confiance : pourquoi tant de défiance ?* Enfin, si pareil choix doit être sous-tendu par la possibilité de faire la jonction avec des problématiques familières, l'argument en faveur des intervalles de confiance repose certes sur le poids médiatique des fourchettes de sondages (mais qui sont en fait bien plus élaborées techniquement que ce qu'on peut enseigner) mais peut être contré par la présentation alternative de multiples situations concrètes tout à fait parlantes pour les élèves. Bernard Prum nous avait écrit : *La démarche unilatère me semble plus simple (au moins, on évite la question de la symétrie). C'est surtout celle du client : « moi, Nicolas S., aurai-je PLUS de 50% des voix ? » ; « ce médicament soigne-t-il MIEUX que celui employé en routine ? ».* On pourrait rajouter, pour certaines filières technologiques ou professionnelles particulièrement, des exemples simples mais réalistes à base de contrôle de qualité industrielle.

Pour en terminer ici sur ce point, je dirai que j'annonçais en préambule que ces échanges avaient eu un certain impact sur mes propres positions. J'ai, « loyalement », assuré un « service après-vente » des programmes successifs de statistique en classe terminale. Pour le test du chi2, j'ai publié en 2005 un article dans le *Bulletin de l'APMEP* titré : *Statistique. Traiter l'adéquation à une loi équirépartie en classe terminale S ou ES : pourquoi ? à quel sujet ? comment ?* S'agissant des intervalles de confiance, j'ai écrit deux billets dans *Images* *des Mathématiques*, dont l'un déjà cité ci-dessus. J'étais animé à chaque fois par la conviction que tout cela n'était « pas aussi terrible » que nombre de professeurs le trouvaient et par le désir de les aider à dépasser des « blocages » à cet égard. Qu'un mathématicien de la qualité de Daniel Perrin ait mis en évidence ses propres difficultés en la matière et dénoncé les ravages (dont j'étais conscient, mais peut-être pas avec la même force) des insuffisances dans la rédaction du programme (en particulier dans la gestion peu rigoureuse des approximations par la loi normale) m'a conduit à considérer qu'il faudrait peut-être bien trouver une autre voie si on veut présenter aux jeunes ce qu'est la démarche de la statistique inférentielle, dont je continue à penser qu'elle est centrale dans la vie scientifique et publique aujourd'hui. Et la problématique du test unilatère prônée par Bernard Prum pourrait être une telle voie.

La mise en cause par Daniel Perrin de l'opportunité d'enseigner les lois gaussiennes au lycée est beaucoup plus iconoclaste car elle touche un point tout à fait central (comme l'indique le nom du « théorème de la limite centrale » qui en fonde l'usage) de la technologie statistique depuis que celle-ci a acquis ses lettres de noblesse il y a maintenant plus de cent ans. Et les références à cette loi « normale » ont acquis « force de loi » dans la littérature scientifique mais aussi dans la vulgate économique et sociale ; qui n'a pas entendu parler de la « courbe de Gauss », qui apparaît souvent abusivement comme une pierre de touche de la validité d'un modèle aléatoire ? Il est donc devenu banal de considérer que la formation du citoyen comporte une présentation des lois gaussiennes à la fois pour comprendre l'origine de leur présence comme approximation pertinente pour de nombreux phénomènes et pour cerner les limites de cette pertinence. Et, en France en particulier, s'est imposée une position selon laquelle c'est dans le cadre du cours de mathématiques que cette présentation doit être effectuée, pour des exigences à la fois de rigueur et d'universalité dans son emploi ; il faut cependant noter que les difficultés de prise en compte de la démarche statistique par les enseignants de mathématiques, actuellement dans ce pays, ont donné naissance à une remise en cause de cette position, même chez certains de ceux qui avaient contribué à sa concrétisation dans les programmes.

D'emblée, dans nos échanges, Bernard Prum avait montré son accord avec Daniel Perrin pour prendre des distances avec cet « impérialisme » de la loi gaussienne aux yeux de certains. Il nous avait écrit, évoquant son livre précité *(La démarche statistique)* : *Dans cet ouvrage je combats résolument l'emploi de la loi gaussienne comme bouche-trou universel pour approximations imparfaites. Historiquement, le succès de la gaussienne – en particulier en Statistiques – est dû à sa facilité d'emploi, soyons honnêtes, de façon très efficace. Dans un grand nombre de cas, il suffit d'une table imprimée sur une page indiquant pour des valeurs de x judicieusement réparties, par exemple de 0 à 3 par pas de 0,05), les probabilités P(N(0;1) =< x)*. Et il insistait en stigmatisant, avec exemple à l'appui, le « charabia » auquel peut conduire, dans des publications en particulier médicales, le terme même de « loi normale ».

Daniel Perrin, Bernard Prum et moi-même étions bien évidemment d'accord sur le fait que la « révolution numérique », sans doute pas encore totalement prise en compte dans la pratique de l'enseignement mathématique en France, relativise un argument essentiel dans l'usage des lois gaussiennes, lequel résidait dans la difficulté du calcul sur les lois binomiales dès que l'effectif n est un peu élevé. Pour citer ici encore un passage du plaidoyer de Bernard Prum pour l'enseignement du test unilatère (mais fondamentalement on peut remplacer dans cette phrase « dds » par « fonction de répartition ») *: Aujourd'hui tous les ordinateurs et toutes les calculettes un peu solides (telles qu'on les utilise, je suppose, en Terminale) donnent* *le dds pour toutes les lois usuelles (toutes celles évoquées ci-dessus et bien d'autres) et permettent de le programmer pour beaucoup d'autres. L'argument qui a prévalu durant presque un siècle se révèle désuet.*

Il ne s'agit d'ailleurs pas là que de probabilités et de statistique. C'est une banalité de dire que l'essor des moyens de calcul informatiques, depuis la seconde moitié du XX^{e} siècle, a entraîné, conceptuellement et techniquement, un retour au discret par rapport à la prééminence du continu qui avait été le grand acquis des mathématiques dans les trois siècles qui avaient précédé. Et en probabilités en particulier cette évolution pourrait alléger la charge pédagogique, car, Bernard Prum le rappelle, le passage aux lois continues impose de faire comprendre ce paradoxe selon lequel la probabilité de chaque réalisation possible est nulle, alors qu'il y en a quand même bien une qui se réalise ! Et de plus si on veut enseigner les lois gaussiennes, on est contraint de considérer des intégrales sur la droite réelle entière. Autant d'obstacles qu'on peut souhaiter éviter en repoussant cet enseignement à plus tard. Et pourtant il ne s'agit là que de la version « probabilités » de difficultés conceptuelles intrinsèques à l'usage du continu, qu'on ne va quand-même pas totalement passer par dessus bord ! C'est pourquoi, sans éluder les réticences qu'exprimait Daniel Perrin, et même en abondant partiellement dans ce sens, Bernard Prum avait proposé prudemment : *Il me paraît donc envisageable d'introduire les gaussiennes.*

Si l'approximation normale perd de sa nécessité opérationnelle, elle reste encore un « très bel outil analytique », et permet en particulier des inversions du type de celles qui sont nécessaires pour assurer le passage des intervalles de fluctuation aux intervalles de confiance (mais là on en revient à la première partie du débat). Je pense pour ma part qu'il est important que l'enseignement des mathématiques fasse une place importante aux approximations, à leurs justifications et à leur bon emploi, en mettant bien en évidence qu'un théorème portant sur des limites, par exemple quand, en statistique, un effectif n tend vers l'infini, justifie ensuite des remplacements, dans les calculs effectifs, du comportement « à distance finie » par le comportement limite. Ceci impose de bien préciser les consignes pour ces remplacements, tout en indiquant fermement que cette dernière démarche est empirique et ne se conçoit que compte tenu d'exigences de précision jugées acceptables dans tel ou tel cas. Encore faut-il que ceux qui sont chargés de cet enseignement, des concepteurs de programmes aux professeurs, n'occultent pas ce saut du mathématique à l'empirique et à ce titre Daniel Perrin dénonce avec raison la présentation dans les programmes, comme si c'était un théorème, d'un énoncé qu'il qualifie de *faux, pas très faux peut-être mais faux tout de même,* assénant, pour un intervalle de fluctuation sur la loi binomiale, les conditions « classiques » $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$. Et certes il est vrai que le théorème de la limite centrale a une démonstration hors de portée des élèves de lycée ; il est même actuellement non enseigné, comme l'ensemble des lois continues en probabilités, dans les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques alors que là les programmes d'analyse fourniraient les outils pour cela. De plus, la maîtrise des approximations des lois binomiales par les lois gaussiennes implique des outils mathématiques encore plus difficiles. Mais, ici encore, ce débat autour de l'enseignement de la statistique renvoie à une problématique plus générale sur celui des mathématiques : est-il licite de faire utiliser par les élèves des résultats dont la démonstration les dépasse ? Je pense pour ma part que oui, à condition que les énoncés restent corrects et que l'usage qu'on en fait soit convaincant.

Et c'est là finalement, me semble-t-il, le cœur du problème. Quel usage va-t-on faire des lois gaussiennes si on les enseigne ? J'ai pour ma part beaucoup défendu l'idée que cet usage se justifiait dans une perspective d'activités pluridisciplinaires ; et des entretiens avec des physiciens ou des biologistes ouverts à de telles activités avec les mathématiciens m'avaient conforté dans cette attitude. Oui mais, si vous allez chercher dans les programmes actuels (et récents, pourtant) de sciences physiques, de sciences de l'ingénieur, de biologie ou de sciences économiques des lycées français, vous n'y trouverez pas de référence aux lois gaussiennes ! Et, dans un document publié sous l'égide de l'inspection générale de sciences physiques sur les approximations, ce sont les lois uniformes sur des intervalles qui entrent en jeu, et pas les gaussiennes. Et pourtant, une fois encore, si on s'intéresse à la « formation du lycéen-citoyen », comme dit Bernard Prum, la « courbe de Gauss » est partout, ce qui implique un double besoin de compréhension et de recul critique.

Voici donc un débat qui reste très ouvert, bien plus que je ne l'aurais dit il y a quelques années. Je rappelle que je disais en préambule que ces confrontations avec Bernard Prum et Daniel Perrin m'avaient fait évoluer. Quelle tristesse que Bernard ne soit plus parmi nous pour poursuivre cette « dispute ».